Тема лекции 1. Введение. Постановка и классификация задач экономико-математического моделирования

Цель лекции: определить цель, задачи, функции, объекты изучения математического моделирования в логистике, рассмотреть понятие модель.

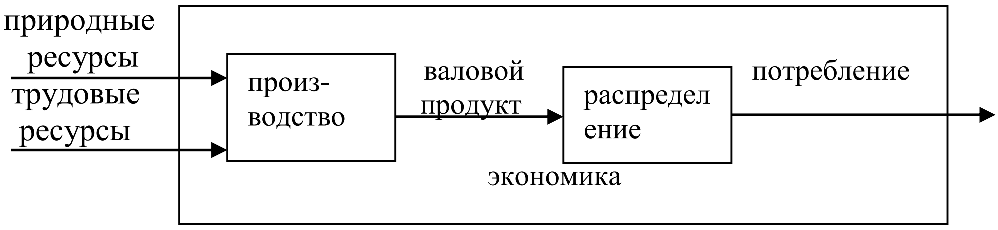
Конспект лекции: Основная цель экономики – обеспечение общества предметами потребления. Элементы экономики – хозяйственные единицы; надсистема экономики – это природа и общество; главные подсистем – производственная и финансово-кредитная.

Особенности экономики как объекта моделирования:

1) в экономике не возможны модели подобия, нельзя построить копию экономического объекта в масштабе, например, 1:1000 и опробовать на ней варианты экономической политики.

2) в экономике крайне ограничены возможности локальных экономических параметров т. к. из-за очень тесной взаимосвязи между элементами и со средой «чистый» эксперимент невозможен, т. е. остается: а) опыт; б) прямые эксперименты в) математическое моделирование. А опыт не всегда может быть перенесен в условия конкретной экономической ситуации; результаты прямых экспериментов можно оценить лишь в краткосрочном периоде и невозможно в средней и долгосрочной перспективе; математическое моделирование должно сопровождаться концептуальными моделями, а они и являются фундаментом математического моделирования.

Структура экономики как объекта математического моделирования:



При выполнении своей главной функции экономическая система реализует следующие действия: размещает ресурсы, производит продукцию, распределяет предметы потребления, осуществляет накопление.

Основной метод исследования – моделирование, т. е. способ анализа, направленный на разработку и исследование модели.

Практические задачи моделирования:

- Анализ экономических объектов и процессов;
- Прогнозирование развития экономического процесса;
- Выработка управленческих решений.

Экономико-математическое моделирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой и методов решения определенных классов задач. Прежде всего, задачи делятся на *задачи линейного* и *нелинейного программирования.* При этом все функции линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования*.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. *Линейное программирование* представляет собой теоретический аппарат модельного исследования, направленного на отыскание наилучшего способа распределения ограниченных ресурсов по нескольким взаимосвязанным по цели и использованию ресурсов видам производственной деятельности. Линейное программирование нашло широкое применение при решении многих практических задач организационно-экономического управления.

Среди задач *нелинейного программирования* наиболее глубоко изучены *задачи выпуклого программирования*. Эти задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи дискретного программирования, динамического программирования, прикладные задачи теории графов и задачи календарного планирования.

Задачи дискретного программирования, заключаются в нахождении условных экстремумов на конечных множествах (или целочисленных решетках). Наиболее изученными задачами этого класса являются целочисленные задачи линейного программирования, т.е. задачи линейного программирования, в которых на все переменные (либо на их часть) наложено дополнительное требование целочисленности.

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к *задаче динамического программирования*.

Прикладные задачи теории графов - задачи нахождения кратчайших и критических путей в графах, возникающие в различных прикладных областях науки и техники, поиск оптимальных маршрутов в транспортных сетях ,а также включающие расчет временных параметров в системах сетевого планирования и управления и пр.

Задачи календарного планирования это задачи, в которых каждая операция выполняется с единичной интенсивностью, причем прерывать выполнение начатой операции не желательно. Задачи этого класса носят типично комбинаторный характер, и эффективные точные методы решения получены только для относительно небольшого числа частных постановок.

Этапы экономико-математического моделирования:

1) Содержательная постановка экономической задачи и ее качественный анализ.
2) Построение экономико-математической модели. Этап формализации – выражение проблемы в математических зависимостях. Для сложных объектов целесообразно построение нескольких разноаспектных моделей
3) Математический анализ модели. Выявляются свойства модели, определяется класс задачи и методы решения. Аналитический и численные методы.
4) Подготовка исходной информации. При системном моделировании результаты функционирования одних моделей могут служить исходной информацией для других моделей.
5) Численное решение. Разработка алгоритмов решения задачи, подготовка программ для ЭВМ, многовариантный анализ.
6) Анализ численных результатов и их применение. Проверка качества, адекватности.

Построение математических моделей прикладных задач

1. Транспортная задача. Транспортная задача формулируется так :

В данных $\mathbf{m}$ пунктах производится некоторый однородный продукт в количествах соответственно $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_m}$ единиц . Этот продукт следует доставить в $\mathbf{n}$ данных пунктов назначения, потребляющих его соответственно в количествах $\mathbf{b_1, b_2, ..., b_n}$. Пусть стоимость перевозки единицы продукта из $\mathbf{i}$ - го пункта производства в $\mathbf{j}$- й пункт назначения (потребления) равна $\mathbf{c_{ij}}$, а соответствующее количество единиц перевозимого продукта равно $\mathbf{x_{ij}}$ ($\mathbf{i}$ =1,..., $\mathbf{m}$; $\mathbf{j}$=1, ...,$\mathbf{n}$). Условия задачи запишем компактно в виде следующей табл.2.1 (двойной матрицы).

Совокупность $\mathbf{m \times n}$ чисел $\mathbf{x_{ij}}$, т.е. матрицу $\| \mathbf{x_{ij}} \|$, будем называть *планом перевозок*, а матрицу $\| \mathbf{c_{ij}} \|$ - *матрицей транспортных издержек* .

План называется *допустимым*, если числа $\mathbf{x_{ij}}$ удовлетворяют следующим естественным условиям :

$$\left.\begin{aligned} & x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,..., m;\ j = 1,..., n), \\ & x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i \ (i = 1,...m), \\ & x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j \ (j = 1,..., n), \end{aligned}\right\}$$

в которых первые **m** равенств означают, что из каждого пункта производства вывозится весь производственный продукт, а последние **n** равенств означают, что каждый пункт потребления полностью удовлетворяется .

Транспортная задача заключается в отыскании среди допустимых планов оптимального, т.е. такого, по которому общая стоимость перевозок

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{минимальна.}$$

. Таблица 2.1

b_j a_i	b_1	b_2	...	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	...	c_{mn} x_{mn}

2. Задача назначения. Имеется m работ и n кандидатов для выполнения этих работ. Назначение кандидата i на работу j определяется затратами C_{ij} . Требуется найти назначение кандидатов на все работы, дающие минимальные суммарные затраты, при этом каждого кандидата можно назначить только на одну работу и каждая работа должна быть выполнена только одним кандидатом. Построить математическую модель описанной задачи о назначении(при этом m =n).

Решение. $\mathbf{Z} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} „_{ij} X_{ij} \to \min$ -целевая функция

При ограничениях

$$\sum_{i=1} X_{ij} = 1, j = 1 : \mathbf{m}$$

$$\sum_{j=1} X_{ij} = 1, i = 1 : \mathbf{n}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-ый кандидат назначен на } j\text{-ю работу} \\ \qquad 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

3. Задача планирования производства. Имеется n параллельно работающих производственных цехов, которые выпускают m видов продукции. Требуется определить план выпуска j –й продукции i –м цехом X_{ij} , который максимизировал бы суммарный доход от выпуска всех продукции всеми цехами, если заданы: $\mathbf{T_i}$ – реальный фонд времени –го цеха; $\mathbf{C_j}$ – цена единицы j –й продукции , $\mathbf{t_{ij}}$ – трудоемкость выпуска единицы j –й продукции i –м цехом , $\mathbf{y_{ij}}$ – запланированное количество j –й продукции для i –го цеха, (т.е. нижний предел плана X_{ij}), $\mathbf{S_{ij}}$ – затраты при выпуске единицы продукции j –й продукции i

–м цехом . Это задача планирования производства.

Построить математическую модель описанной задачи.

Решение. $Z = \sum_{i=1} \sum_{j=1} („_j - S_{ij}) X_{ij} \to \max$

при ограничениях

$\sum_{j=1} t_{ij} X_{ij} \le T_i, i = 1:n$

$X_{ij} \ge y_{ij}, j = 1:m$

$X_{ij} >= 0$

4. Задача коммивояжера. Имеется n городов и задана матрица C_{ij} расстояний между этими городами. Выезжая из исходного города (будем приписывать ему 1) коммивояжер должен побывать во всех остальных городах ровно по одному разу и вернуться в исходный город. Определить в каком порядке следует объезжать города, чтобы пройденное суммарное расстояние было бы минимальным? Построить математическую модель описанной задачи.

Решение. $Z = \sum_{i=1} \sum_{j=1} „_{ij} X_{ij} \to \min$ -целевая функция

При ограничениях

$\sum_{i=1} X_{ij} = 1, j = 1:m$

$\sum_{j=1} X_{ij} = 1, i = 1:n$

$u_j - u_i + n * X_{ij} = n - 1$

5. Задача о ранце. Имеется n грузов определенного веса и ценности. Заданы C_i - ценность i -го груза и p_i - вес груза. Требуется упаковать в ранец определенной грузоподъемности N такие грузы, чтобы суммарная ценность упакованных грузов была бы максимальной. Построить математическую модель описанной задачи.

Решение. $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \to \max$ -целевая функция

При ограничениях $\sum_{i=1} p_i X_i \le N$,

$$\times_i = \begin{cases} 1, i - й \quad груз \quad упакован \\ 0, i \text{ - й груз не упакован} \end{cases}.$$

6. Задача о водораспределении. Рассмотрим систему водораспределения, состоящую из водохранилища и потребителей воды (совхозы, колхозы, промышленные предприятия и т.д.). Примем, что для данного водохранилища определены потребители и предварительные объемы воды $\mathbf{R_j}$ (j=1,n), требуемые **j** –му потребителю в конкретно планируемый период (день, неделя, месяц и т.д.) При этом рассмотрим случай дефицита водного ресурса, когда суммарные потребности всех потребителей превышают наличие воды в водохранилище, а также предполагается, что водохранилище не распределяет воду сверх необходимой потребности потребителю. Известны коэффициенты потерь j–го потребителя $\mathbf{a_j}$ и объем воды в водохранилище **B**. Необходимо определить какой объем воды должен распределить водохранилище каждому **j**-му потребителю, учитывая свой объем и заявки потребителей, чтобы минимизировать сумарные потери потребителей от дефицита воды. Построить математическую модель описанной задачи

Решение. $Z=\sum_{j=1}^{n} a_j(R_j - X_j) \to \min$ -целевая функция

при ограничениях

$X_j \le R_j, j=1:n$

$\sum_{j=1}^{n} X_j \le B,$

$X_j >= 0$

7. Задача о смесях(о диете). Дневная диета должна содержать m видов различных питательных веществ соответственно в количестве не менее вi (i = 1:n) единиц. Имеется n различных продуктов в количестве не менее dj (j = 1; m) единиц. Пусть aij – количество единиц го i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го продукта; Cj – стоимость единицы j-го продукта . Определить какие продукты и в каком количетсве включить в диету: чтобы она удовлетворяла минимальной дневной потребности в каждом питательном веществе при наименьшей общей стоимости используемых продуктов. Построить математическую модель описанной задачи .

Решение. $Z=\sum_{j=1}^{m} C_j X_j \to \min$ -целевая функция

при ограничениях

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j \ge b_i, i=1:n,$

$X_j \le d_j, j=1:m,$

$X_j >= 0.$

Контрольные вопросы:

1.Этапы экономико-математического моделирования.

2.Классы задач и их характерные особенности.

3.Транспортная задача, постановка и математическая модель.

4. Задача о назначении, постановка и математическая модель.

5. Задача о ранце, постановка и математическая модель.

6. Задача о коммивояжере, постановка и математическая модель.

7. Задача о смесях, постановка и математическая модель.

Литература:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, Изд. "Высшая школа" 1986.

2. Бурков В.Н., Кулжабаев Н.М. Активные системы и деловые игры–Алматы:2000.

3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

4.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва: Наука, 1988

5.Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование, Изд. "Наука". Москва 1967.

6.Кулжабаев Н.М. Исследование операции. Учебное пособие. –Алматы:РИК КАО имени И.Алтынсарина,1999.

7.Кулжабаев Н.М. Муханова Г.С. Системный анализ и исследование операции.